算術の論理学的基礎付けとその現象学的再解釈

――リシールによるフレーゲ、デデキント読解――[1]

長坂 真澄

Die logizistische Grundlegung der Arithmetik und ihre phänomenologische Neuinterpretation

– Richirs Lektüre von Frege und Dedekind –

NAGASAKA Masumi

In dem hier vorliegenden Aufsatz wird dargestellt, wie der zeitgenössische Phänomenologe Marc Richir Freges und Dedekinds Versuche, die Arithmetik logisch zu begründen, interpretiert und wie diese Lektüre ein neues Licht auf den kantischen Begriff der Zahl als transzendentales Schema der Quantität wirft.

Zu diesem Zweck beginnt der Aufsatz mit der Beschreibung des Hintergrunds dieser Untersuchung, nämlich der Wandlung des Zahlenbegriffs von Kant zu Husserl und dem Unterschied zwischen der Phänomenologie Husserls und der Richirs. Nach der Erläuterung dieses Hintergrunds wird im zweiten Abschnitt untersucht, wie Richir in seiner Abhandlung „Die Vererbung und die Zahlen“ (1983) Freges Versuch einer logischen Begründung der Arithmetik liest, der in den *Grundlagen der Arithmetik* (1884) dargelegt wurde. Der dritte Abschnitt des Aufsatzes stellt dar, wie Richir in seiner *Phänomenologischen Untersuchung IV* (1983) Dedekinds Versuch einer logischen Begründung der Arithmetik liest, den dieser in seinem Brief an Keferstein (1890) darlegte. Dieser Brief umfasst die wesentlichen Punkte von Dedekinds Darstellung in *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888).

Durch diese Schritte, die Richirs Aufarbeitung der Texte von Frege und Dedekind verdeutlichen, bestätigt der hier vorliegende Aufsatz, dass Richir die Bewegung des transzendentalen Schematismus im Fregeschen Begriff der „Vererbung“ und im Dedekindschen Begriff der „Kette“ entdeckt.

数とは何か、数を数えるとはどういうことか、算術においては何が行われているのか、この問題は哲学においてしばしば提起され、新たな思想潮流の誕生を促す発端となってきた。カントの超越論的哲学、ミルの心理学主義、フレーゲの論理学主義、フッサールの現象学の誕生などは、そのような視点から捉え直すことができる。

本稿では、かつてのフレーゲ、デデキントによる算術の論理学的基礎付けの試みに対し、現代のフランス語圏における現象学者リシールが、現象学の立場からどのように読解するかを確認する。ここから現れるのは、論理学的基礎付けの試みが持つ困難と、数を量（quantitas）の超越論的図式と考えるカントへの回帰である。

本稿は以下の行程を辿る。まず、第 1 節にて、本論の背景を確認する。すなわち、カント哲学からフッサール『算術の哲学』（1891）へと継承される、数概念の変遷について、概観的な見取り図を提示した後、フッサールの現象学とリシールの現象学の違いを、無限の直観と網羅的規定（汎通的規定）（durchgängige Bestimmung）の可能性の問題として説明する。

次に、第 2 節において、フレーゲ『算術の基礎』（1884）（以下、GLA と略）での数の自然系列の構築に対する、リシールの批判的読解を、論文「遺伝と数」（1983）に依拠して整理する。フレーゲにおいては、無限の直観の不可能性は、数の存在を直観に基づけることの不可能性を証示する一例であるのに対し、リシールにおいては、無限の直観の不可能性は、無限集合の要素の網羅的規定の不可能性と一体をなす。このような前提の違いから、フレーゲにおける数の論理的な構成の試みは、リシールによって現象学的に再解釈されることとなる。

続けて、第 3 節において、リシール『現象学的研究』第 IV 研究における議論のうち、デデキントによる算術の論理学的基礎付けの試みに対する読解の要点を整理する。この議論では、デデキントが自著『数とは何か何であるべきか』（1888）（以下 WS と略）を要約的に整理している 1890 年 2 月 27 日付のケーファーシュタイン（Keferstein）宛ての書簡を導きの糸として、検討がなされている。この書簡が WS の要点としている点は 9 点あるが、本節では、これらの点のうち第 9 点を除く 8 点を、リシールが提起する以下の 3 つの問題に対応させつつ、検討してゆく（ただし、これらの問題は一つの同じ問題の異なる表現に過ぎず、分離することはできない）。

（a）数を集合の諸要素へと還元する際に要素の網羅的規定の可能性を前提することの問題

（b）自然数の系列 N の構成における循環の問題

（c）無限の問題

以上の段階を経て、リシールによるフレーゲ、デデキント読解を辿りつつ、本稿は、リシールがフレーゲの語る「遺伝」、デデキントの語る「鎖」のうちに、論理学的な基礎付けではなくむしろ超越論的図式機能の運動をこそ見出すことを、確認する。

１．本論の背景――量の超越論的図式としての数

数や算術を捉えるにあたって、伝統的に、二つの対極をなす考え方がある。一方は、数という理念的なものは、具体的な諸対象の集まり（経験の対象としての実在的なもの）に対する抽象を通じて獲得されるとする立場、他方は、数は人間の認識から独立に存在するとする立場である。カントの用語で言えば、前者は、算術の命題をア・ポステリオリな綜合判断として捉える経験的心理学であり、後者は、これをア・プリオリな分析判断として捉える形式的論理学である。

カント哲学が超越論的哲学として行った革命は、算術の命題を、上述のどちらでもなく、ア・プリオリな綜合判断としたことにある（cf. KrV, A6; B10）。一方で、経験的心理学による算術の説明には大きな欠陥がある。それは、ア・ポステリオリな綜合判断の積み重ねでは、普遍性には到達できず、にもかかわらず、算術は普遍性を有するからである。他方で、形式的論理学による算術の説明も、十分であるとは言い難い。ア・プリオリな分析判断のみでは、知は拡張されないが、にもかかわらず、算術において、我々は現に、知を拡張しているからである。

カントは算術の命題がア・プリオリな綜合判断であることを、彼の超越論的図式論を用いて説明する。これにより、数および算術は、あらかじめ人間とは独立に存在し、人間が発見するものであるのか、あるいは、人間が発明、創造するものであるのか、という二者択一の問いは、いったん終わりを告げるかに思われる。数は、また算術は、人間の認識がア・プリオリな仕方で（それゆえ主観性を通して客観的な仕方で）産出するものとなるのである。

とはいえ、そもそも「量の超越論的図式」とは何か。「図式」とは、概念を感性化すると同時に感性を悟性化するものとされ、カントにおいて、認識の条件である、概念と直観を媒介するものである。図式は想像力によって産出される（つまり、図式は想像される）[2]。算術の命題の場合、概念に該当するのが、量の概念であり、直観に対応するのが、時間という直観の形式である[3]。数は、量の範疇と時間という直観の形式が結びつく際（量の範疇が時間という直観の形式に適用される際）に媒介となるものとされるのである。

それでは、図式が「超越論的」であるとは、どういうことか。超越論的図式とは、純粋悟性概念の図式である[4]。「超越論的図式機能」とは、範疇と現象を媒介する働きである（cf. KrV, A138; B177）。たとえば、一方で、因果性という範疇があり、他方で火と熱という現象がある場合、それら範疇と現象の媒介となるのが、時間順序という超越論的な時間の規定、すなわち超越論的図式である。

時間順序は、視覚や触覚などの感官によっては決して捉えられない。時間順序とは、これこれのものを知覚して、このもの（原因）ゆえにあのもの（結果）が生じたと理解するための、認識の前提条件となるものである。このように時間を超越論的に規定することは、想像力によって産出される超越論的な図式の機能だとカントは考えた。

さて、量の範疇には、単一性、数多性、全体性があるとカントは考えたが、これらの範疇は、それらのみでは単なる悟性の形式であり、想像力の助けなくしては、現象に適用されることができない。ここで想像力が産出するのが、時間を超越論的に規定することとしての超越論的な図式の機能である。ここで、量の範疇に対する時間の超越論的規定は、時間系列であるとされる[5]。言い換えるなら、単一性、数多性、全体性は、時間系列という超越論的図式を介して初めて時間という、我々の直観の形式と結びつき、それによって初めて我々は、単一性、数多性、全体性を感性的に捉えることができるようになるとカントは考えたのである。つまり、数を数えるということは、時間を系列として産出するということであり、これらの量の範疇を感性的にありありと捉えるための条件となるのである。数とは時間系列であるということになる。このような考え方は、上述のように、数を人間の認識に基づけると同時に、これをア・プリオリな認識とすることにより、完全な客観性を持つものとして確立することを可能にする。

とはいえ、以上に確認した、算術の命題に関するカントの記述は、断片的素描のようなものにとどまり、不明確な部分も大きい。それゆえ、カントの後、多くの哲学者によって、カントの超越論的図式論という考え方は継承不可能なものとされ、カント以前の心理学と論理学の二項対立が再生するにいたった。つまり、数を心理学的に説明するか（ミル）、論理学的に説明するか（フレーゲ）という二者択一へと逆行したのである。

フレーゲは、幾何学の命題こそ、カントの言うようにア・プリオリな綜合判断と考えてよいとしたものの、算術の命題については、これが綜合判断であることを否定した。彼は心理学主義を、それが陥る三つのアポリア――1）差異と相等性のアポリア、2）0 と 1 のアポリア、3）大きな数と無限のアポリア――を指摘することにより批判する[6]。しかしそれだけではなく、経験主義を乗り越えようとするカントの図式論をも、結局のところは経験的にしか解釈できないものであるとして批判したのである[7]。

さて、これら様々な哲学的論争を視野に入れた上で、あらためて、数とは何かを考えた哲学者、それが、現象学を打ち立てる以前のフッサールであった。フッサールは、カント、フレーゲ、ミルのいずれも批判しつつ、独自の仕方で数というものの発生について考える。しかし、我々の考えでは、大きな枠組みから言えば、彼の試みはまさしく、ミルの心理学主義、フレーゲの論理学主義を二つの座礁と捉え、カントのア・プリオリな綜合判断という考え方を、刷新しながら継承するものであった。

その詳細は別論にて論じたが[8]、ここでその概略を示しておく。フッサールは、一方で、数を時間に結びつけるカントを批判するが、他方で、カントの議論の枠組みを受け継ぎつつ、数を時間ではなく空間という直観の形式から考えようとした、ランゲをも批判する。というのも、数が時間あるいは空間に依拠するものであったら、それは時間的あるいは空間的順序に依存するものになるはずであるが、そうはなっていないからである[9]。そもそも、空間表象や時間の表象は、あらゆる概念の形成に必要なものなのであって、数の形成に特別にそれらが寄与するとは考えられないのである。

さて、このようにフッサールはカントによる、数の時間系列としての捉え方には問題があるとするものの、他方で彼は、カントによる数の捉え方の核心部分、すなわち、ア・プリオリな綜合という考え方を、真に継承していると我々には思われる。というのも彼は、数を数える行為を、何か（Etwas）と何か（Etwas）を結びつけることとして捉えるからである。それが収集的結合（kollektive Verbindung）という考え方である。数は「…と…と…」と数える際の「と」（und）による結合、すなわち綜合として捉えられるのである。ここで、「何か」は何でもよい。それらが互いに同一であろうと、差異を含んでいようと、無関係なのである[10]。ここでは、経験的な知覚の対象としての対象の属性は括弧に入れられている。この綜合は、経験的な綜合ではないのである[11]。

それは、対象それ自身から、対象と対象との結合（「と」）へと関心を転換すること、すなわち、対象を単なる「何か」へと還元することである。ここでは、想像力の働きが告知されている。この還元は、後の範疇的直観、形相的直観、本質直観、想像的変更といった、現象学を特徴づける重要な諸概念の登場を予告しているのである。

さて、以上のような重要な議論が展開される、フッサールの『算術の哲学』は、しかしながら、第一巻が刊行されたのみで、第二巻は未刊行にとどまる。これに関しては、フレーゲの辛辣な書評[12]が影響したという見方も可能だが、フレーゲからの影響を強調するのみでは、なぜその後のフッサールが、フレーゲの論理学主義に同調することなく、独自の現象学を確立したかが説明できない。とはいえ、フッサールの関心が算術をめぐる哲学から現象学へと移行した後、算術についてのまとまった論考は、公刊著作としては、その後残されることはなかった。カントールやヒルベルトに対する言及はフッサールの公刊著作のうちに散見されるものの[13]、それらは算術の基礎付けについてのまとまった彼のその後の考えを提示するものではない。では、フレーゲやデデキントによる、数を論理学的に基礎づける試みに対して、現象学の側からは、何が言えるであろうか。

フッサールの現象学はフランス語圏で継承され、20 世紀後半から大きな思想潮流となったが、そのフランス語圏で 1980 年代、フッサールに代わって、現代の現象学の立場からフレーゲ、デデキントの試みを論じた現象学者が、リシールである。このリシールによるフレーゲ、デデキント読解を検討するのが、本稿の目的である。

ただし、リシールはフッサールの現象学の教義をそのまま受け取る継承者ではない。彼はフッサール現象学をカントに立ち戻って批判的に継承することにより、言わばカントに回帰する形で現象学を展開している。彼の特徴として、カントが超越論的仮象と呼んだ問題を真剣に受け止めるという点が挙げられる。すなわち、彼はカントと同様、実無限（顕在的無限）の直観は不可能であると考える[14]。このことは同時に、無限（集合）における要素が網羅的に規定される（汎通的に規定される）ということはありえないと考える立場であることを意味する[15]。これは、無限の直観を（感性的直観ではなく範疇的直観として）認めるフッサールに対する、リシールの重要な違いである。以上が本稿の背景となる見取り図である。

２．フレーゲによる算術の論理学的な基礎付けに対して
――リシールの批判的考察

さて、以上の背景を踏まえた上で、リシールがフレーゲをどのように読解し、どのような結論を導き出すのかを以下に示したい。ここで前提となっているのは、上にも述べたように、実無限の直観を認めない現象学という立場である。

注意しておきたいのは、無限の直観が不可能であるというこの主張自体は、フレーゲと共通しているという点である（上掲註 6 のフレーゲの第三のアポリア）。ただし、この同じ主張から、フレーゲは、直観に基づかない仕方で数は存在するとの主張に移行する点において、リシールとは異なる[16]。また、上述のように、リシールにおいて、無限の直観の不可能性は、無限集合の諸要素の網羅的規定の不可能性と切り離しえない。しかし、フレーゲにおいては、無限の直観の不可能性が主張されるのに対し、無限集合の諸要素の網羅的規定の可能性は前提される。この点こそが、これから確認する、リシールのフレーゲ読解の焦点となる問題である[17]。

さて、リシールがフレーゲの『算術の基礎』における、数の論理学的な基礎付けを詳細に検討するのは、論文「遺伝と数」においてであり、本節で採り上げるのは、その議論である。

（ａ）概念の外延としての数（GLA §68）

フレーゲは、数が直観とは独立に存在すること、また、算術の命題が人間の認識とは独立に成り立つことを示すために、それまでの哲学者たちとは異なるまったく独自の仕方で数を考察する。というのも、数を直観とは無関係に定義する必要があったからである。

まず、数が直観とは無関係であるということを、彼は次の例から示す。我々は、直観の対象としては同一の事物を、「5 本の木（fünf Bäume）」と捉えたり、「1 つの木立（eine Baumgruppe）」と捉えたりすることがある。ここで、数の言表が関わっているのは、直観ではなく、概念である。よって、数の表明は、何かをどのように概念的に捉えるかに関わっているのであり、直観に関わっているのではないと言えるのである（cf. GLA59, §46）。

しかし、それだけでは、やはり数は「何か」に関わっていることになってしまう。よって発想の逆転をフレーゲは提案する。それは、数そのものがこれこれの具体的な「何か」から発生するという考え方を逆転させ、或る数と別の数が同じであるという同定の方から出発するという方法である。

リシールは説明する。数を自存的対象として確立するためには、フレーゲはまず、「同一と捉えること（Gleichung / identification）」を考えなければならなかった、しかもこの同一性は、「客観的同一性（identité objective）」でなければならなかった、と[18]。つまり、フレーゲ

においては、「数の定義は必然的に、二つの概念が等数的であることの定義を通してなされる」（HN81）。

我々はしばしば、数というものがまず定義されて、その後に、二つの数が等しいか否かが判る、と考える。しかしフレーゲはその反対の道をとる。二つの数が等しいということの定義から、数の定義がなされるのである。この概念とあの概念に属す基数が等しい（一対一対応する）ということから出発して初めて数が定義される。「このことが可能であるとき〔すなわち、概念 F に帰属する諸対象を、概念 G に帰属する諸対象へと、一義的に対応させることが可能であるとき〕、私は簡潔に、概念 F を概念 G と等数的であると名付ける」（GLA79, §68）。一般に、概念 F に属する数は、「概念 F と等数である」ようなあらゆる概念の外延であるとされるのである[19]。

現代の我々からすれば、フレーゲが、概念の外延を無制限に措定することに問題はある。実際、概念の外延という集合を無制限につくり、それらの諸要素が確定されるもの、互いに明確に区別されうるものであると考えることは不可能であることを、ラッセルのパラドクスは示している[20]。たとえば、「自己自身を含まないようなあらゆる集合の集合」の存在を認めるならば、パラドクスを引き起こしてしまう。よって、矛盾を引き起こさないような概念の外延（集合）のみに制限して論じることが必要となる。

しかしリシールは、概念の外延を無制限に前提するということ以前に、そもそも概念の外延自体を前提することに問題があるとしている。その概念が無限の対象を含むためである。

> 困難は以下の点にある。それは諸概念の諸々の外延を前提しなければならないということである。つまり、F あるいは G によって包摂される諸対象の諸集合が、常にすでに確定された諸々の個の諸集合として、常にすでに構成されているという、このことを、前提しなければならないということである。（HN82）

ここで彼が問題としているのは、フレーゲの議論において、概念の外延に属す諸要素の網羅的規定（汎通的規定）の可能性が、前提されているということである。要素の網羅的規定の可能性は、有限集合ならば前提できるかもしれない。しかし、無限集合では前提にはできないと彼は主張しているのである。網羅的規定の可能性は、リシールによれば、カントの言う超越論的理想を前提する。それは超越論的仮象であり、仮象であるゆえのパラドクスを孕む。ラッセルのパラドクスは、そのようなパラドクスの一つとして位置付けられるだろう。

（b）関係概念（GLA §70）

さて、次に確認すべきであるのは、フレーゲにおいて、数と数との関係が、「関係概念」（諸要素の間の関係を表す概念、すなわち関数）を用いて、一種の論理式のように表されるようになることである。

ホテルの支配人が、ナイフと皿が十分にあるかを確かめるとき、彼は、ナイフと皿を数える必要はない。それぞれの皿の右にナイフを置いてゆき、それぞれのナイフがテーブルにあり、皿の右側にあるようにできればよい。このとき、皿とナイフは 1 対 1 対応している（cf. GLA82, §70）。このとき、「ナイフは皿の右側にある」とは、記号を用いれば、「α は A の右側にある」ということである。このように、判断の内容（中身）を取り除いて、関係だけを取り出すことができる。ここで得られるのが、「関係概念」である。つまり、内容から独立した、純粋に論理的な関係概念が取り出されるのである。ここで示されているのは、フレーゲの言葉で言えば、概念と、概念を「補完するもの」との分離（GLA82, §70）である。

「関係概念は、〔……〕純粋な論理に属す」。これは「ア・プリオリ」な「分析的」真理を表明する（GLA83, §70）。またこの関係は、関係 φ などと名付けることができる。言い換えれば、F に属す諸対象と G に属す諸対象が、関係 φ によって対応する（cf. GLA83, §71）と定式化できるのである。このとき、

> 表現
> 「概念 F は概念 G に等数的である」
> とは、次の表現と同じ意味（gleichbedeutend）であるとする。
> 「概念 F の下に属す諸対象と概念 G の下に属す諸対象を双方に一義的に対応させるような、関係 φ が存在する」（GLA85, §72）

さて、数がこのように等数的であるということから概念の外延として捉えられうるとしても、異なる数同士はどのように関係づけられるのだろうか、それらはどのように順序づけられ、数の自然系列を構成するのか、という問題が生じる。この数の自然系列をも、フレーゲは論理学的に基礎づけなければならないが、それをなすのが、以下の議論である。

（ c ）ゼロの個体化（GLA §74）

――自己に対する非 - 同一性を通して自己の同一性を確立する反転

まずフレーゲはゼロから始める。基数ゼロが帰属する概念は、概念の外延という考え方からすれば、「丸い四角」としても、「木製の鉄」としても、「不死の人間」としてもよいということになる。そのような概念に属す対象がないため、これら概念に帰属する基数はゼロであるからである。しかし、あくまでフレーゲは、いかなる直観の対象にも拘束されないような純粋に概念的な定義を考える必要がある。そこで、「自らに等しくない」という概念がフレーゲによって選ばれることになる[21]。これは確かに、いかなる直観からも独立の定義である。A は A 自身に等しい、これは、ここでは時間性は考慮されていない以上、あらゆるものについて言えることであり、逆に、あらゆるものは、「自らに等しくない」ということはあ

りえない。「自らに等しくない」という概念に属す対象は無であり、よって、「自らに等しくない」という概念に帰属する基数はゼロである。そこで、逆にゼロをこのように定義することから始めるのである。

ここに、一つの反転がある。「自己自身に等しくない」という概念に帰属する基数を「０」と定義するやいなや、自己自身に等しくないという概念の外延（「０」)、つまり空集合それ自体が「存在する」ことになる。リシールはこの点について、次のように指摘する。

> 空虚や〈無〉という特徴をなす、この自己への非 - 同一性は、それ自身が、概念が数ゼロであるような外延の〈無〉あるいは空虚として、自己自身へと同一化されるのである。この数ゼロは、あらゆる可能な概念の領野の中で、外延が空虚であるような諸概念を浮かび上がらせるような概念である。このことにより、ゼロという数は、それ自身、自己自身に等しい一つの個となるのである。（HN87）

ここに、自らに対する非 - 同一性をもって自らを同定するようなゼロという数の個体化がある[22]。「自己自身に等しくない」という概念に帰属する基数を「０」と定義するや否や、「０」自身は、自己自身（「０」自身）に等しい「０」として個体化される。この反転が、後に見るように、リシールが読み取る超越論的図式論の議論につながっていくことになる。

（d）数の自然系列における直続の定義と１の個体化（GLA §76, §77）

さて、フレーゲは次に、この０から続く自然系列を定義してゆくことになるが、そのためにまず、直続する（直接に続く）数の定義を行っている。

> 命題
> 「ある概念Ｆが存在し、この概念の下に属す対象ｘが次のような仕方で存在する。すなわち、概念Ｆに帰属する基数が、ｎであり、かつ、概念「Ｆに属すがｘに等しくない」に帰属する基数が、ｍであるような仕方で、である」
> とは、〔次の命題と〕同じ意味であるとする。
> 「ｎは、自然な数列において、ｍに直接的に続く」（GLA89, §76）

これが直続の定義である。実際に、Ｆが「０と等しい」という概念である場合を考えると、「Ｆに属すがｘに等しくない」という概念は、「０と等しいが０とは等しくない」という概念であり、この概念に帰属する基数は、そのような対象は無であるため、０である。よってこのとき、上のｍは０である[23]。また、「０と等しい」という概念に帰属する対象は１つしかない（すなわち「０」という数）が、これを１の定義とする。すると、１は０に直続するということが言える[24]。さて、この直続は、あらゆる数の直続を定義するものであるが、あ

くまで数の自然系列において隣接する任意の二数の関係を定義するものである。数の系列自体については、ここではまだ定義づけはなされていない。

リシールは、直続の定義についての箇所（GLA §76）での F について、次のように指摘する。

> 〔……〕フレーゲによって提案された定義は、同定による再認判断以外のものを介入させるものである。それはすなわち、F に属す他のすべての対象に対する x の非 - 同一性である（もしくは、他のすべての対象の x に対する非 - 同一性である)。(HN89)

つまり、「「F に属すが x に等しくない」という概念」がすでに前提として要請しているのは、F に属す x 以外の対象すべてについて、それらが x に対して同一ではないということ、すなわち「x に対する非 - 同一性」である。

> ところで、或る対象が、他の対象に対して持つ、この非 - 同一性は、同時に、(対象としての) x 及びその他の諸対象の自己同一性〔自己同定性〕を介入させる。つまり、これら諸対象の自己同定あるいは個体化と、x のその他の諸対象に対する非 - 同一性（また、その他の対象の x に対する非 - 同一性)、すなわちそれらの差異を介入させる。この差異それ自体は、これら諸対象の個体化によって可能となったのである。（HN89）

つまり、上述の非 - 同一性がさらに前提として要請しているのは、x が x 自身に、あるいは x ではない対象がその対象それ自身に同一であるという、自己同定である。それらが個体化されていることが、議論の前提になっているのである。よってリシールは言う。「〔……〕F に属すあらゆる対象は、あらかじめ、再認可能、区別可能であり、すなわち、個体化されている〔……〕」(HN88)。

さらにリシールは、先ほど我々が反転と表現した運動に着目する。「それゆえ、後続〔＝ここでは直続の意〕の概念において、諸々の自己同一性あるいは諸々の個の間の差異の戯れがある」(HN89)。ここで「戯れ」と言われているのは、x 以外の F に属す対象が、x と同一ではないものとして自己を同定するその運動を指している。これら対象は、それらはそれらで、基数 m が帰属する概念に属すものとして捉えられることになる[25]。

つまりフレーゲは、F に属すあらゆる対象が網羅的に規定され、かつ互いに明確に区別されるということを前提している、とリシールは指摘しているのである。このような、要素の網羅的規定の可能性は、有限な対象の属す概念であれば前提してもよいかもしれない。しかし、無限の対象が属す概念の場合、それは前提されてもよいのかという問題が、示唆されている。

（e）遺伝系列の構成（GLA §79）——循環

さて、この直続の定義からさらに広げて、フレーゲは、関係概念 φ によって結ばれる諸項の列を、関係 φ の系列とし、かつて彼が『概念記法（*Begriffsschrift*）』（1879）において、「遺伝する（sich vererben）」と表現した事象[26]を定義していくことになる。

> 命題
> 「〔①〕x が関係 φ を持って関わるあらゆる対象が、概念 F に属すならば、
> かつ、
> 〔②〕d が概念 F に属すということから、一般的に、d がいかなるものであろうと、d が関係 φ をもって関わるあらゆる対象が、概念 F に属す、ということが帰結するならば、
> 〔③〕y は、F がいかなる概念であろうとも、概念 F に属す」
> とは〔次の命題と〕同じ意味であるとする。
> 「y は φ -系列において、x に続く」
> および
> 「x は φ -系列において、y に先行する」（GLA92, §79）

リシールは解説する。「〔①〕「x が関係 φ をもって関わるあらゆる対象が、概念 F に属する」とは、「x に対する φ の適用のあらゆる結果は、性質 F を持つ」ということである。x と関係 φ を持つとは、「φ によって措定される秩序に従って、x と継承の関係のうちにあるということ、つまり、系列 φ において x に後続するということ」を意味する。しかしこの関係は、まだなお遺伝的継承の関係ではない（HN102)。「〔②〕d が概念 F に属すとき、d がいかなるものであろうと、d が関係 φ をもって関わるあらゆる対象が、概念 F に属すということが帰結する」という、「第二の命題」をもってはじめて、「関係 φ は、遺伝的関係である」ということが明確になる。「というのも、或る何らかの対象 d が属すような、あらゆる性質、あらゆる概念 F は、関係 φ に従って、遺伝的に継承されるからである。それは、対象 d がいかに選ばれ、個体化されようともである」（HN102sq.）[27]。

このように敷衍した上で、リシールは指摘する。

> ここでこそ、我々は循環的な定義に関わっている〔……〕。d の集合あるいはクラスを定義するということは、遺伝的な φ という継承を定義することに帰結し、逆に、遺伝的な φ という継承を定義することは、d の集合あるいはクラスを定義することに帰結する。〔……〕（HN103）

$\mathrm{d}, \varphi(\mathrm{d}), \varphi(\varphi(\mathrm{d})), \varphi\left(\varphi(\varphi(\mathrm{d}))\right), \ldots, \varphi\left(\varphi\left(\varphi\left(\varphi(\varphi(\ldots))\right)\right)\right)$と続く対象が属す集合を定義することは、そもそも φ を定義することであり、逆に、φ を定義することは、このような d の集合を定義することである。ここで、d の集合は φ に依拠して定義され、φ は d の集合に依拠して定義される。d の集合が有限であれば、このことに問題はないが、リシールは、フレーゲが命題②において、「いかなる」および「あらゆる」という表現を用いていることに着目する。

> 実際、〔フレーゲによる定義が持つ〕あらゆる困難は、次のことに由来する。対象 d に対する普遍的な量化と、概念 F に対する普遍的な量化（quantification universelle）によって、あたかもあらかじめ系列 φ の確定された全体を手にしているかのように振る舞うということにである。ところが実際には、知られているように、我々はそのようなものを決して手にしてはいない。少なくとも、系列が無限である場合には。自然数の系列の場合がそうであるように。（HN104）

ここでリシールが問題にしているのは、普遍的な量化、すなわち、命題の成立範囲が無限であることにほかならない。ここで、$\mathrm{d}, \varphi(\mathrm{d}), \varphi(\varphi(\mathrm{d})), \varphi\left(\varphi(\varphi(\mathrm{d}))\right), \ldots, \varphi\left(\varphi\left(\varphi\left(\varphi(\varphi(\ldots))\right)\right)\right)$ …と無限に続く諸対象のすべてが、あらかじめ、網羅的に規定可能であることが前提されていることが、問題なのである。「よって、自然数の系列の場合、あたかもあらかじめ数のあらゆる性質を知っているかのように――それは不可能なのだが――とりかかっているのである〔……〕」（HN104）。

無限集合の要素の網羅的規定が可能であるとすることは、超越論的理想を措定することであるという、リシールの立場からすれば、フレーゲによる数の遺伝系列の定義は、認識不可能なものを前提しているのである。

さて、以上、遺伝系列としての数の自然系列の構築をめぐる議論を確認した。しかし、数の自然系列がどのようなものであるかは、これまでの議論ではいまだ明らかになっていない。

（ｆ）数の自然系列 N の構成（GLA §82）

第 82 節において、フレーゲは、$0, 1, 2, \ldots$と終わりなく続く数の自然系列の定義にとりかかる。ここでまず、数の自然系列には限りがないことの証明が要求される。フレーゲは、或る条件のもとでは、「概念「n で終わる自然な数列に属す」に帰属する基数は、自然な数列において n に直接的に続く」ことを証明する（GLA94, §82）[28]。

フレーゲは証明の見取り図を示しているのみであるが、証明を実際に行うと次のようになる。まず、証明は以下の三段階に分かれている。

【1】 前提① a が d に直続する。

前提② 概念「$\{0,1,\ldots,d\}$ に属す」(概念 H_d と表記）に帰属する基数が d に直続する。

帰結　概念「$\{0,1,\ldots,a\}$ に属す」に帰属する基数が a に直続する。

【2】 0 について【1】の命題が成り立つ。

【3】 n について【1】の命題が成り立つ。

まず、

概念「$\{0,1,\ldots,d,a\}$ に属すが a ではない」(概念 H_a-a と表記する）

と

概念「$\{0,1,\ldots,d\}$ に属す」

は、1 対 1 対応させることができるため、等数的である。ここで、「0 で始まる自然な数列に属す、いかなる対象も、自然な数列において自己自身に続くことができない」(GLA95, §83）ということは前提しておく。つまり $d \neq a$ であることはあらかじめ前提しておく。

ここで、概念 H_d に帰属する基数は、前提②により、d に直続する。すると、概念 H_d に帰属する基数は、前提①により、a である。よって、概念 H_a-a に帰属する基数も a である。

ここで、§76 の直続の定義から、概念 F「$\{0,1,2,\ldots,a\}$ に属す」(H_a）に帰属する基数が、概念「概念 F に属すが a に等しくない（H_a-a）に帰属する基数に直続する。ところで、概念 H_a-a に帰属する基数は a であるから、a に直続するのが、概念 F「$\{0,1,2,\ldots,a\}$ に属す」(H_a）に帰属する基数である。以上により、 概念 H_a に帰属する基数は、a に直続することが示せた（【1】)。

次に【2】(0 について【1】の命題が成り立つこと）を確認する。【1】の命題に、$d = 0, a = 1$ と代入すれば、概念「$\{0\}$ に属す」(H_0）に帰属する基数（＝1）は 0 に直続するという前提は成り立つ。よって、概念「$\{0,1\}$ に属す」(H_1）に帰属する基数は 1 に直続する (【2】)。

この概念「$\{0,1\}$ に属す」(H_1）に帰属する基数を 2 と名付けよう。すると、概念「$\{0,1,2\}$ に属す」(H_2）に帰属する基数は、2 に直続する。この概念「$\{0,1,2\}$ に属す」に帰属する基数を 3 と名付けよう。すると、概念「$\{0,1,2,3\}$ に属す」(H_3）に帰属する基数は 3 に直続する、… 等々と続き、概念「$\{0,1,2,\ldots,n\}$ に属す」(H_n）に帰属する基数は n に直続すると言える（【3】)。

以上の議論について、リシールは指摘する。まず、概念 H_n に帰属する基数は、0 の個体化から始まり、a という「鎖の目」を一つ一つ反復することによって個体化されると言う。

> 要するに、系列の起源あるいは最初の要素として 0 を固定することによってのみ、遺伝的性質 F〔……〕を、系列のあらゆる数へと一義的に結合していくことが可能とな

るのだ。よってここで言われているのは、数 n は 0 の個体化に関連づけられることによってしか、個体化され得ないということである。(HN117)

あたかも概念 H_n に帰する基数は、0 から n までに存在した、系列の諸項の累積を、「記録する」役割を負っているかのようであり、「基数は、いわば、そのつど、系列を次第に構成していく継起的な反復のたびごとの、系列の「記憶〔装置〕」」であると言う。それは、「累積の最中における、系列がなす諸々の反復の継起の登録」(HN118) である。

系列の諸要素が、〔……〕順々に——継起的な反復によって——個体化されたのでない限りは、この系列のセクションは、相対的に不確定なものにとどまり続ける。系列が常にすでに区別された諸々の個によって構成されていることを前提するのでない限りは——フレーゲはまさにこれを前提しているように思われる、しかし我々としては、これを素朴に前提するわけにはいかない——そうなのである。(HN119sq.)

つまり、「鎖の目」がそのつど自己自身に対する非 - 同一性から自己への同一性へと反転するたび、個体化が起こるが、その個体化の反復には終わりがなく、完成することがない。ここでリシールが着目しているのは、フレーゲの§82 の議論で登場する a である。

〔……〕 a は、a を系列の考察されたセクションから排除することを可能にし、外延あるいは基数 a において H_a-a を反省することを可能にする、反省の場として捉えられるその時からしか、数としては個体化されない〔……〕。(HN122sq.)

系列の継起という反復のそのつどの d に直続する a が、反省の場となる。ここでリシールは、先に 0 から 1 へと至る議論で確認したのと同様の反転があるとする。それを彼は「点滅」と名付けている。

よって、個体化された現象としての a は、自己への同一性と自己への非 - 同一性との間の点滅の場として現象化される。自己への同一性——ただしそこでは a は現象としては消え、概念が差し迫ってやってくることとして現れる——と、自己への非 - 同一性——そこでは、a は、概念とは区別される現象として現れるが、同時に、個体化された現象としては消える——との間の点滅の場としてである。(HN124sq.)

ここでリシールは、現象としての a と概念としての a を区別している。上に確認したように、フレーゲは、「0 で始まる自然な数列に属す、いかなる対象も、自然な数列において自己自身に続くことができない」(GLA95, §83) (再掲) ということを前提としていた。つまり常に d ≠ a であることは前提とされていた。すなわち、0 の個体化から始まる一つ一つの数

の個体化の構成の運動に着目するなら、そのつどの最終項が、一つ前の自己自身（最終項）に対して異なる「現象」として自らを現すことにより、自らに対する同一性を確保し、「概念」となる。この自己に対する非 - 同一性によって自己を同定することが「点滅」と呼ばれているのである。この点滅の場（ a の個体化の場）が、「鎖の目」と呼ばれていたものである。ここにリシールは、「思考」と「現象」の出会いがあると言う。「この鎖の目において、思考すること——反省するものあるいは反省の運動自体——と、思考内容——個体化された、しかしいまだセクション H_a-a の基数として指定されてはいない現象 a ——とが出会う」（HN129sq.）。

思考と現象との出会いという表現から想起されるのは、カントの言う超越論的図式論である。

> 〔……〕数は、そこではまさに、この現象 a である〔……〕。それは、いつまでも完遂されはしない個体化の最中にある。〔……〕この個体化は、鎖の端から端へと、飽くことなく続けられる。あるいはむしろ、数は、カントにとってそうであるように、量の超越論的図式となる。（HN132）

この図式は「反復のリズム」とも形容される。「この点滅が、現象の個体化のリズムを反復させるのである」（HN136）。

リシールによれば、フレーゲの議論の中には「二つの要請（*deux* exigences）」（HN116）がある。第一の要請は、「形式的要請」である。すなわち、純粋に形式的な論理によって数を定義するという要請である。第二の要請は、「性質 F を実際に「質料的」に規定していくという要請」（HN116sq.）である[29]。

つまり、リシールは、次のように考えている。遺伝的性質を持つ項の系列を考えるのみでは、数は獲得できない。実際に、0 において遺伝関係を 1 との間に打ち立てられること、次に 1 において遺伝関係を 2 との間に打ち立てられること、と順々に、鎖の目を一つ一つ形成してゆくように、その遺伝的系列に属す項を数として質料的に確定、個体化していく作業が必要である。フレーゲはここで、フレーゲ自身の論理主義的な議論とは裏腹に、数を構成していると再解釈される。それは、現象 a を思考によって捉えるという、時間化を伴う作業である。すると、数はこの思考作用と思考内容との出会いなしには、構成されないことになる。数は、人間の認識なしには構成されないことになる。

リシールはこれを反復の運動の現象化と呼び[30]、ここでは「超越論的時間化」がなされているとする[31]。つまり、カントがア・プリオリな綜合判断であるとした、数を数えるということそのものが行われているということである。

以上が、リシールのフレーゲ読解である。つまり、リシールの見立てでは、フレーゲは、カントの超越論的図式としての数を構成しているのである。

ここで、かつてフッサールが『算術の哲学』第一巻でなした、数を時間系列と捉えることに対する批判は、リシールにとって問題とならないのであろうかという疑問が浮かぶ。この問題について、リシールは言及していないが、我々は以下のように考える。第一節で見たように、フッサールが問題としたのは、時間における順序が、数えられる数を左右しないということであった。しかし、カントは量の図式である時間系列と、関係の図式である時間順序を区別している（上掲註5)。量の図式である時間系列は、順序には左右されないのである。

３．デデキントによる算術の論理学的基礎付けの試みに対して

――リシールの読解

次に、リシール『現象学的諸研究 IV』（1983）[32]における、デデキント読解を観察する。知られているように、デデキントは、フレーゲとは独立に、おそらくフレーゲの『算術の基礎』以前の時期に、数を論理学的に基礎づける試みを構想していた。それを我々は、構想からかなり経って発表された『数とは何か何であるべきか』（1887）（WS）のうちに見いだすことができる。ここでデデキントは、写像という考え方により数を集合として考えることを提示している。

リシールは、この著作を直接扱う代わりに、本書の内容を簡潔にまとめた 1890 年 2 月 27 日付のケーファーシュタイン（Keferstein）宛ての書簡を手引きとし、ところどころの細部を WS の議論によって補うという手法をとっている。本節ではこれを確認したい。

上述の手紙において、デデキントは、自著 WS のエッセンスを 9 点に絞って簡潔に解説している。この 9 点とは、次のように要約されうるものである。

1）数系列は諸要素からなる集合として捉えられる。

2）数の後続関係は集合からそれ自身の中への写像をなす。

3）この写像は集合からその真部分への全単射である。

4）この集合は無限集合である。

5）この集合はいかなる数の後続数でもない 1 を含む。

6）上の 5 点を満たす集合のうち、鎖をなすものの共通部分として、自然数の系列 N が決定される。

7）無限集合の存在は証明できる。

8）鎖に依拠して帰納法を用いることができる。帰納法により、数が持つ様々な性質が、すべての数に妥当することを証明できる。

9）矛盾なく N を定義することは可能である。

以下では、このうち（a）第 1 点、（b）第 2 点から第 6 点、（c）第 7 点と第 8 点について、デデキントの議論と、それに対するリシールの批判的読解を追う。

（a）数を集合の諸要素へと還元する際に網羅的規定の可能性を前提することの問題（上記第 1 点の検討）

まず、第 1 の点、数系列は諸要素からなる集合として捉えられる、という点について確認する。

デデキントは言う。「数列 N は、数と呼ばれる諸々の個あるいは要素からなる一体系である。このことは、体系というもの一般について普遍的に考察することへと導く」（CDK272; BK207）。

リシールが指摘するように、ここでは数というものが持つ算術的な諸特性はまずいったん宙づりにされ、集合の諸要素へと還元される[33]。デデキントはここで自著（WS）第 1 節への参照を促している。リシールはこの第 1 節の、第 1 条項、第 2 条項に着目する。

第 1 条項では、すべての物（Ding）は 我々の思考の対象（Gegenstand）であると定義されている[34]。デデキントは「物」という言葉で「我々の思考のあらゆる対象」を指す。ここで、「物は、それについて言明されうるような、あるいは思考されうるような、すべてのものによって、完全に規定されている（vollständig bestimmt）」（WS1）とされる。

リシールは指摘する。

> このように、デデキントの宇宙は、完全に個体化された（complètement individuées）諸物で構成された一つの宇宙なのだ。また、もしも完全に個体化されていないような何かがあったならば、この何かは、我々の思考の対象ではないということになるのだ。つまり、それは物（chose）ではないのだ。（RPh, IV, 15）

この考え方は、デデキントの議論の前提となっているものである。ここで、ある対象（集合の要素）が「完全に確定される」という完全な個体化がリシールにとって意味することは、上述のように、カントの言う超越論的理想の措定にほかならない。というのも、物が完全に規定されうるのは、それが超越論的理想という基準に照らし合わされることによってのみだからである。

このような前提を、それゆえリシールは、「形而上学的次元の前提」であると形容する（cf. RPh, IV, 15）。無限の要素をデデキントは完全に規定できると考えている。しかし、無限の直観を不可能とするリシールの立場からすれば、無限集合の要素の規定は、仮象（直観なき思考）である。

さらに、第 2 条項において、デデキントは、様々な物は「精神のうちで」一つの「体系 S」を構成するとし、次のように言う。

このような体系 S （あるいは集まり、多性、全体）は、我々の思考の対象として、これもまた、一つの物である。この体系は、完全に規定されている（vollständig bestimmt）。もしも、あらゆる物について、それが S の要素であるかないかが、規定されているならば、である。（WS1f.）

ここで、宇宙にあるすべての物（我々の思考の対象のすべて）について、それが或る体系 S に属しているか否かは決定できるのだろうか、という疑問が浮かぶ。リシールは述べる。

このこと〔＝あらゆるものについて、S の要素であるか否かを規定すること〕は、もしもこの全体が、無限である場合には、問題となる。というのも、〔この S の〕完全な規定（détermination complète）を獲得するためには、この無限の全体を踏破するということを実行しているのでなければならないことになるからだ。そして、我々が見ていくように、デデキントにとって、我々の諸々の思考で構成された世界は、無限であるのだ。（RPh, IV, 16）

やはり、無限集合の要素の網羅的規定の可能性が前提されていることが問題となっているのである。以上が第 1 の点に対するリシールの指摘である。

（b）自然数の系列 N の構成の問題——循環の問題（上記第 2 点から第 6 点の検討）

次に、デデキントが自然数の系列 N の構成を説明する、第 2 から第 6 の点（上掲）を確認する。

まず、第 2 点、すなわち、数の後続関係は集合からそれ自身の中への写像をなすということを示すことにより、デデキントは、自然数の後続関係を写像により論理的に説明することを試みている。「体系 N の諸要素は、互いに或る関係のうちにある。〔……〕あらゆる規定された数 n に対して、それに続き、その次により大きな数であるような、一つの規定された数 n' が対応する〔……〕。このことは、ある体系の写像 φ という普遍的な概念の考察へと導く」（CDK272; BK207）。ここで、$\varphi(n) = n'$ は n に後続する要素、つまり、n より大きく n に最も近い要素である。すると φ(N) は N の N 自身への写像であることになる[35]。かくして、リシールも解説するように、系列における継起という概念が、写像という、より一般的な概念に依拠して説明されることとなる[36]。

第 3 の点は、数の後続関係を表す写像は、集合からその真部分への全単射[37]であるという点である。デデキントは述べる。「異なる数 a, b に対して、やはり異なる数 a', b' が続く。写像 φ はそれゆえ、一義性、つまり相似性という性質を有している」（CDK273; BK207）。

よって、数の後続関係は集合からそれ自身の中への写像をなし、この写像は集合からその真部分への全単射なのであるが、この集合が無限集合であるというのが第 4 点である。デデ

キントは述べる。「あらゆる数が、後続する数 n' であるというわけではない。つまり、φ(N) は N の真部分である。ここにこそ、（先行する数との結合において）数列 N の無限性が存している」（CDK273; BK207）。

第 5 の点は、上述の無限集合が、いかなる数の後続数でもない 1 を含むという点である。デデキントは言う。「しかも数 1 は、φ(N) のうちには見出されない唯一の数である」（CDK273; BK207）。

以上をもって、彼は、「順序付けられた一重無限の体系 N の完全な性質」が明らかになると言う。ここで典拠とされているのは、WS 第 64 条項における無限の定義である（デデキント無限）[38]。

リシールは指摘する。第一に、「デデキントにとって、算術の基礎付けは、無限集合の確立と無限集合の存在を通してなされる」のだということ――つまりリシールが前提できないとするものが、デデキントの議論においては出発点となっていること――、また、第二に、「デデキントにとっては、無限集合それ自体と、彼が一重無限集合と名付けるものとの間には 差異があるということ」である。リシールは言う。「〔……〕我々は、一つの循環の前にいる〔……〕。この循環は、純粋思考の論理的な諸法則の上に系列 N を基づけるにいたることを望むならば、まさに避けるべきものである」（RPh, IV, 18）。すなわち、無限集合の存在を前提することによって、無限集合 N が特定されるという循環である。

しかし、デデキントは、上述の 5 点のみではいまだ N の確定に十分ではないとし、第 6 点において、「鎖（Kette）」の概念を導入する。鎖は、WS 第 37 条項で次のように定義されている。「$K' \ni K$ ならば、K は鎖と呼ばれる」（WS9）。$K' \ni K$ とは、K' が K の部分であること、つまり、$\varphi(K)$ が K の部分であることを意味する（ $\varphi(K) \subset K$ あるいは $\varphi(K) \subseteq K$ ）。上の 5 点を満たす集合のうち、鎖をなすものの共通部分として、自然数の系列 N が決定されるのである。これは、上述の 5 点を満たしながらも N には属さないような数列を、排除する作業にあたる（cf. CDK273; BK208）。ここで、根本要素（「 1 」）を含むあらゆる鎖の共通部分が、自然数の系列に等しいとデデキントは表明する[39]。

ここで、リシールが指摘するように、「鎖が持つ第一の重要な特性は〔……〕、鎖 K の像 K' がそれ自身鎖である――すなわち、$\varphi(K') \subset K'$ ――ということ」である[40]。だからこそそれは鎖と呼ばれる。「〔……〕鎖であるという特性は、写像 φ の反復される適用に応じて、遺伝的に、伝達される〔……〕」。つまり、$\varphi(K) \subset K$ だが、$\varphi(K)$ 自身が鎖であるから、$\varphi[\varphi(K)] \subset \varphi(K)$ となる。さらに $\varphi[\varphi(K)]$ 自身が鎖であるから、$\varphi\{\varphi[\varphi(K)]\} \subset \varphi[\varphi(K)]$ となる。さらに $\varphi\{\varphi[\varphi(K)]\}$ 自身が鎖であるから…以下同様。ここで問題となっているのは、入れ子（emboîtement）状の反復である[41]。

さて、ここで、リシールによる「第一の指摘」を確認しよう。「この順々になされる反復は、一つの起源の個体化、一つの根源的要素の個体化と、まさに相関的である〔……〕」（RPh, IV, 23sq.）。つまり、N の構成は、1 の個体化と相関的になされる。ここから提起されるのは、「この要素を要素として選択すること、あらゆる他の要素から識別され区別される個とし

て選択することの問題」である（RPh, IV, 24）。1 が個体化されることで初めてデデキントの鎖は始まるのだが、しかし、この 1 が個体化されるためには、φ で表される後続関係の系列が無限にいたるまで網羅的に確定されていなければならないのである。リシールは言う。

> 〔……〕根本的要素は、鎖の概念によってしか、個体化され得ない。発生的な観点からするなら、集合 N を構成するためには、根本的要素のあらゆる鎖を、すでに手にしているのでなければならない。というのも、この根本的要素は、S の諸要素 s のうちから、φ(s) が S′ に属し、s が S′ には属さないというものとして、選ばれるものであるからである。（RPh, IV, 59）

かくして、無限を前提しているから、根本的要素は、実は「超越論的仮象」であるというのがリシールの主張なのである。これは「錯覚、あるいは根元的に個体化されていないものについての個体化された純粋な〔空虚な〕現象」であると言う（RPh, IV, 59）。それは、根底的に個体化できないものを個体化できるかのように考えているという錯覚なのである。ゆえにそれはまた「自己同一性を持たないものの自己同一性」、「自己自身に同一化される「自己自身に同一でない」という概念」（RPh, IV, 59sq.）とも形容される。要するに、無限まで鎖が確定的に構成されないことには、自らを同定できない 1 が同定されることが、問題となっているのである。

（c）無限の問題（上記第 7 点及び第 8 点の検討）

リシールの第二の指摘は無限の問題に関わる[42]。実際、これまで述べてきたように、リシールは無限の直観を認めず、それは無限集合の存在は証明できないということを意味している。それゆえ、リシールからすれば、デデキントのこれまでの議論はすでに無限集合の存在（無限集合の諸要素の網羅的規定の可能性）を前提としているために、証明できないものを前提している議論であるということになる。少なくとも一つの鎖の存在を保証するためには、無限集合の存在を前提しなければならない[43]。さて、この無限の存在の証明への言及が、第 7 の点である。

ここでデデキントは一重無限の体系は、我々の思考の世界に存在するだろうかと自問し、この存在証明がなされなければ、この体系が内的な矛盾を含んでいないかという疑いは払拭されないとする。次いで彼は自著（『数とは何か何であるべきか』）の第 66 条項の無限の存在証明を典拠に挙げ、一重無限といった体系の存在は証明できているとするのである[44]。この無限の存在こそ――さらに、一重無限とそうではない無限という少なくとも二種以上あるこの無限の存在こそ――リシールが問題とする点である[45]。

リシールは、第一の問題、すなわち個体化の問題と、第二の問題、すなわち無限の問題との間には、「緊密な共謀関係がある」とする。「というのも、無限を一重無限へと、無限集合

S を一重に無限な集合へと、「単純化＝一重化（simplifier）」するためには、根本的要素（élément fondamental）の個体化が必要だからだ」（RPh, IV, 25）。つまり、両問題は共存関係にある。

リシールの第三の指摘は、鎖という概念をつうじてデデキントのうちに見出される「遺伝的継起」の問題、さらに算術的帰納法の問題に対するものである[46]。

> 一重の無限であるような系列 N を見出すためには、$N = \varphi_0(1)$ であるような S の S 自身の中への写像 φ_0を見出すのでなければならない。またその逆に、N が、根本的要素〔＝１〕の鎖であるように、それ〔写像〕自身に対して鎖であるという特性を遺伝的に伝達するような、この写像を見出すためには、すでに、系列 N が何であるのかを知っているのでなければならない。（RPh, IV, 26）

つまり、N を構成するためには φ が必要だが、φ を見出すためには N があらかじめ必要である。ここにリシールは「循環」を見る。N は構成される以前にすでに前提されているのである[47]。

しかし、デデキントは、第 8 の点において、鎖の概念の上に帰納法を基づけ、それにより、数というものが持つ諸特性を、1 から出発し、あらゆる数に備わっているとする証明ができると考えていた[48]。つまり、リシールが指摘するように、「すべては、あたかも写像 φ が、鎖であるという特性を遺伝的に伝達しつつも、同時に、ア・プリオリに未規定的な数の諸特性（*F*）を伝達しているかのようである」（RPh, IV, 27）のである。

ここにはリシールが再解釈するフレーゲと同じ反復のリズムがある。フレーゲにおいて、0 があって初めて系列が始まると解釈されたように、デデキントにおいては、1 があって初めて系列が始まる。ただし、フレーゲと異なり、そのつど a という現象が、概念的に表現されるということが問題となっているのではない。デデキントの場合は、1 の確定それ自体が、超越論的理想なのである。

リシールの立場からすれば、ここには、写像 φ の反復のリズムのみがあり[49]、個体化は常に途上にある。ここにリシールは、「無際限に自らを反復する反復の超越論的図式論（写像 φ）」（RPh, IV, 61）を見る。ここには、「起源も終わりもない」（RPh, IV, 61sq.）。それは、第二節において我々が確認したように、やはり時間系列というリズムの反復なのである。

以上、リシールのデデキント読解を確認した。

結論

現代の数学では、無限の存在証明は回避され、無限の存在は公理として前提される。それと同時に、無限集合の要素の網羅的可能性も前提される。公理を公理として認める限りで、基礎付けという哲学的課題は重要ではなくなる。これにより、フレーゲの構想した遺伝系列やデデキントの構想した「鎖」の理論は生きることになった。デデキントの Keferstein 宛て

の書簡で述べている第 2、第 3、第 5、第 8 の点は、後にペアノが整理した 5 つの公理の基礎となったと推測できる[50]。

それに対して、現象学的観点からは、あくまで主観によって基づけられていないものを無批判に措定することはできない。リシールがカントに回帰して、数は量の超越論的図式であると言うとき、彼は、フッサールの言う基礎付けの課題を継承していると考えられる。ただしここでは、数は再び時間化において捉え直され、図式を産出する想像の対象であることになる。かくして、フレーゲ、デデキントの論理学主義的立場にもかかわらず、それらに反する形で、彼らの議論は、あくまで超越論的図式の機能を示すものとして再解釈され、リシールにおいて意味を持つこととなるのである。

リシールは晩年の対話で、フレーゲとデデキントを高く評価しつつ述べている。

> 数の系列は〔……〕図式的なのだ、フレーゲもデデキントも見抜いた、二つの法則が常に成り立つという意味においてね。すなわち彼らは、一方で、〔自然数の〕系列における所与のあらゆる数に対して、一つの後続する〔自然〕数があるということ、他方で、この系列は無限である、ということを理解したのだ。ここで問題をなしているのは、数の特性〔propriétés〕が規則的に継承されているということなのだ。つまり、このリズムの持つ無限という側面こそが、こうした継承から図式機能を形成するのである。（ER89）

数が図式であるというとき、そこにはすでに、①後続数の存在と②系列の無限性が含意されているという。ただしこの図式が「リズム」と表現される限りにおいて、それはあくまで時間的かつ潜在的な無限であることが表明されている。かくして数は、無限という思考の対象でしかないものに先行されて、反復のリズムの中で、現象学的に構成されるものであることになる。理念体の図式機能は「自己 - 一致的である」という特徴を持つとされる[51]。自己に非 - 同一なものとしての現象が自己自身に同一なものとして同定される点滅が、そこに見出される。それは時間化の運動における、現象と概念の交差を指し示している。

注

[1] 本稿で用いる記号を以下に示す（著者は生年順に、著作は時系列順に並べる）。引用文中の強調はすべて原文に属す。〔〕内の付記は引用者による。

AA : Immanuel Kant, *Kants gesammelte Schriften. Herausgegeben von der Königlich Preußisschen Akademie der Wissenschaft*, Reimer, 1900ff.

KrV : Immanuel Kant, *Kritik der reinen Vernunft*, AA III, IV.

WS : Richard Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen? / Stetigkeit und Irrationale Zahlen*, Springer Fachmedien Wiesbaden GMBH, 1965.

CDK : Richard Dedekind, « Correspondance Dedekind-Keferstein » (in : A. Sinaceur, « L'infini et les nombres : Commentaires de R. Dedekind à « Zahlen », La correspondance avec Keferstein »), *Revue d'histoire des sciences*, XXVII (3), Juillet 1974, pp.251-279).

BK : Richard Dedekind, C. Tapp (hrsg.), „Richard Dedekind: Brief an Keferstein", in : K. Scheel, Th. Sonar, P. Ullrich (hrsg.), *In Memoriam Richard Dedekind (1831–1916). Number Theory – Algebra – Set Theory – History – Philosophy*, Münster, WTM Verlag, *Schriften zur Geschichte der Mathematik und ihrer Didaktik*, S. 205-211.

GLA : Gottlob Frege, *Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau, Wilhelm Koebner, 1884.

Hua : Edmund Husserl, *Husserliana*, Den Haag / Dordrecht, Boston, London / Dordrecht, Nijhoff / Kluwer Academic / Springer, 1950ff.

HN : Marc Richir, « L'Hérédité et les nombres », *La liberté de l'Esprit, n° 4, Qu'est-ce qu'un père?,* Paris, Balland, octobre 1983, pp.77-137.

RPh, IV : Marc Richir, *Recherches phénoménologiques*, IV, Bruxelles, Ousia, 1983.

ER : Marc Richir, Sacha Carlson, *L'écart et le rien ; conversations avec Sacha Carlson*, Grenoble, Millon, 2015.

本稿は、以下の口頭発表をもとにしている。長坂真澄、「算術の論理学的基礎付けに対する現象学からの考察」、科学基礎論学会、2018 年 11 月 10 日。また、本稿の第 1 節の一部と第 2 節は以下の論考においてフランス語にてすでに発表している。Masumi Nagasaka, « Le schématisme transcendantal dans l'arithmétique : la lecture richirienne de Frege », *Meta: Research in Hermeneutics, Phenomenology, and Practical Philosophy*, XI (2), 2019, pp.659-678.

[2]「感性なしには我々にはいかなる対象も与えられず、悟性なしにはいかなる対象も考えられないであろう。〔……〕それゆえにこそ、自らの概念を感性的にすること（つまり自らの概念に対して、直観における対象を付け加えること）が必要であると同様に、自らの直観を悟性的にする〔自らに理解できるものにする〕こと（つまり直観を概念の下にもたらすこと）が必要なのである」（KrV, A51; B75）。

[3] カントは広義の quantum（量）を quantitas と狭義の quantum に区別している。「外官にとってのあらゆる量（quantum）の純粋な形像は、空間である。とはいえ、感覚一般のあらゆる対象にとってのその純粋な形像は、時間である。しかし、悟性概念としての量（quantitas）の純粋な図式は、数である〔……〕」（KrV, A142f.; B182）。あくまで感官に供されうる形像には還元されえない quantitas としての量の図式が数なのである。また、カントは数を数えるためには時間の継起が必要だと考えた。「数とは、一つのものから一つのものへと（同種の

ものを）継起的に加えていく作業をまとめてとらえる表象である。よって、数は、或る同種の直観からなる多様一般を綜合する、統一にほかならない。この統一は、私が時間自体を、直観の覚知において産出することを通して、なされるのである」（*Idem.*）。「算術は、時間において、諸単位を継起的に追加することによって、その数概念を成立させる」（*Prolegomena* in: AA, Bd. IV, 283, §10）。

[4] 単なる図式とこの超越論的図式の違いを説明するために、「形像（Bild）」が理解の助けとなる。「形像」が「図式」と区別されるのは、「図式」は普遍的な概念に関わるものであるのに対し、「形像」はあくまで個的なものにすぎないことによる。よって、ある概念を感性的に表す「形像」があるとしても、それはその概念の「図式」をまず必要とする。たとえば、三角形の概念を感性的に表す「形像」として、これこれの長さの辺とこれこれの角度の角を持つ三角形があるとしても、それはその概念の「図式」、すなわち、三角形一般を感性的にあらわすものをまず必要とする。この「図式」それ自体は、想像力によって産出される（つまり、想像される）ほかなく、よって思考の中にしかないものであるとされる。これに対し、純粋悟性概念の図式は、「いかなる形像のうちにももたらされようのないもの」であるとカントは言う。実際、たとえば因果律を、我々は感性的な「形像」としての直観の対象にすることができない（cf. KrV, A141f.; B181）。

[5] 量は、時間という形式のもとで加算の手続きを可能にする超越論的な時間規定、すなわち時間系列によって、初めて具体的に理解可能なものとなるとされる。ここで時間系列は、時間順序とは区別される。時間順序は、関係の範疇の超越論的な時間規定であるとされる。関係の範疇には、実体／属性、原因性／依存性、相互性の三つがあるが、これらの範疇は、時間順序を媒介として初めて具体的に表象可能なものになるとカントは考える。第一に、実体とは、実在性が時間のうちで持続することであり、属性とは、実在性が時間のうちで持続しないことである。第二に、原因性／依存性は、A が起これば常に B が起こるという継起を指す。第三に、相互性は、時間において、複数の事象が同時存在し、互いが互いに作用し合うということである。ここで、持続の有無、継起、同時存在は、時間系列では捉えられず、時間順序においてのみ捉えられる（cf. KrV, A145; B184）。

[6] Cf. 長坂真澄、「アポリアの始まり――若きデリダのフッサール『算術の哲学』読解――」、『現象学年報』（30）、2014 年、133-140 頁。第一のアポリア――差異（Verschiedenheit）と相等性（Gleichheit）の両立不可能性――とは、一方で、異種の諸対象の単なる堆積に対しては、数えるという行為は発生しないが、他方で、同じ一つの対象も、数えるという行為の対象にはならない（同じものを数えることは無意味である）という難問を指す。第二のアポリア（0 と 1 のアポリア）は、0 や 1 は多性ではないため、0 や 1 という数を対象の直観には基づけようがないという難問を指す。第三のアポリア（大きな数や無限のアポリア）とは、大きな数の対象や無限の数の対象は直観の対象となり得ないという難問を指す。心理学主義的な

数の捉え方が直面するこれらのアポリアは、数を論理学主義的に捉えることにより、払拭さえるとフレーゲは考えた。「心理学的なものを、論理学的なものから、主観的なものを客観的なものから、峻別しなければならない」(GLA, X)。

[7] フレーゲは『算術の基礎』において、次のようにカントに反論している。「カントは、指あるいは点の直観の助けを借りようとしている。そのことを通して、彼はこれらの命題を、彼の意に反して、経験的な命題として現しめる危険に陥っている。というのも、37863 本の指の直観は、いずれにしろ純粋な直観ではないからだ。〔……〕いったいそもそも 135664 本の指や 135664 つの点の直観を、我々が持つということがあるだろうか」(GLA6, §5)。

[8] 註 6 を参照。

[9] たとえば、対象が A, B, C, D という順序で把握されても、あるいは D, C, B, A と逆の順序で把握されたとしても、それは数としては同じ 4 と数えられる。このことは、時間が数の概念の形成と無関係であることを示しているとフッサールは考える(cf. Hua XII, 31f.)。空間についても同様である。たとえば、A, B, C, D という対象が、左から右に並んでいても、右から左に並んでいても、数としては同じ 4 である(cf. Hua XII, 36f.)。

[10] この「或るもの」の概念は、主観性の関心の方向の転換を指し示す。様々な諸対象を「何らかのもの(irgend etwas)」と捉えるとき、主観性の関心は、それら諸対象の内容や特徴へとはもはや向かっておらず、むしろ、それらの「結びつき(Verknüpfung)」(Hua XII, 79)に向かっている。

[11] フッサールのこの数の捉え方においては、フレーゲの提示した第一のアポリア、同一性と差異のアポリア自体が生じない。さらに、フレーゲの提示した第二のアポリア(0 と 1 のアポリア)、及び、第三のアポリア(大きな数と無限のアポリア)に対しても、フッサールは回避策を提供する。詳しくは註 6 で挙げた拙論を参照されたい。

[12] Gottlob Frege, „Rezension von: E. G. Husserl, Philosophie der Arithmetik I“ in: Frege, L. Angelleli (hrsg.), *Kleine Schriften*, Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1967, S.179-192 (Erstdruck in: *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik,* vol. CIII, Halle, 1894, S.313-332).

[13] フッサールとカントールの関係については以下を参照されたい。長坂真澄、「超限と無限——カント及びカントールを経由するラズロ・テンゲリのフッサール論」、『宗教哲学研究』(35)、昭和堂、2018 年、90-103 頁。

[14] Cf. 長坂真澄、「マルク・リシールはなぜ現象学の鋳直しを唱えるのか——カントの超越論的理想批判を導きの糸とするフッサール、ハイデガー読解」、『表象』(9)、月曜社、2015 年、156-170 頁。

[15] リシールにおいて、無限の直観の不可能性とはとりもなおさず、無限集合の諸要素の網

羅的規定の不可能性を意味するということである。この両者は切り離しえない。カントは超越論的弁証論の「純粋理性の理想」の章において、無限を認識するという超越論的仮象の問題を、ライプニッツに由来する「網羅的規定（omnimoda determinatio）の原則」と結び付けて論じている（『形而上学序説』第八節を参照（Gottfried Wilhelm Leibniz, Schneider, Ulrich Johannes (hrsg.), *Monadologie und andere metaphysische Schriften*, Hamburg, Meiner, 2002, pp.18-21）。これは、「「すべて現実に存在するものは網羅的に規定される」（*alles Existierende ist durchgängig bestimmt*）」（KrV, A573; B601）という原則である。カントはこの原則を、概念における（論理的な）規定と、物における（存在論的な）規定を区別する指標として導入している。概念は矛盾さえなければ可能であるが、物が存在するためには、単に矛盾がないというだけではなく、網羅的規定の原則に従うのでなければならない（cf. KrV, A571; B599）。つまり、物が存在するならば、この物が持つしかじかの属性やその程度が、くまなく規定されるはずだということである。この規定のための基準となるのが、あらゆる属性の完全性を自己のうちに持つ超越論的理想である。というのも、完全性という基準なしには、物の属性やその程度を規定しようがないからである。カントは言う。「理念が規則を与えるのと同様に、理想〔……〕は、原像として、模像の網羅的規定のために役立つ」（KrV, A569; B597）。理想は、「不完全なものの度合いや不足を評価し測定するため」の「基準」として役立つ（*ibid.*）。つまりカントは、超越論的理想が物の網羅的規定を可能とするための超越論的前提にほかならないことを明らかにしたのである。それは思考の対象であり、直観の対象とはなりえない。

[16] 現象学者であるリシールは、無限の直観が不可能であるということから、数の発生を直観に基づけることはできないという発想には移行しない。

[17] フレーゲの側からすれば、彼の意見は一貫している。彼は、無限の直観は不可能であるそのことから、直観自体に数の発生を基づけるのを拒否するのであり、よって無限集合の要素の網羅的規定が可能であるというのは、直観によるものではなく、思考によるものであるということになるからである。

[18] すなわち、ここで問題となっているのは「再認（Wiedererkennung / recognition）」であるが、フレーゲは、この再認を、主観的ではない仕方で捉えることができるのでなければならない（cf. HN78）。

[19] 「それゆえ次のように定義する。概念 F に帰属する基数は、「概念 F に等数的」という概念の外延である」（GLA79f., §68）。

[20] 1902 年にラッセルがフレーゲに手紙によって示唆したパラドクスに対して、フレーゲは『算術の基本法則』第二巻（1903）の附論 2（後書き）で論じることになる。彼はこのパラドクスを、〈自分自身に所属しないクラス〉のクラス」のパラドクスとして解説した上で、次のように述べている。「しかしこれをもって、これまで用いてきた意味での概念の外延と

いう語は、実のところ、撤廃される。「第一の概念の外延が第二の概念の外延と一致する」という表現が、「第一の概念のもとに属すあらゆる対象が、第二の対象にも属し、また逆も真である」という表現と同じ意味であるとは、言うべきでない」（Frege, *Grundgesetze der Arithmetik*, *II*, Jena, Hermann Pohle, 1903, 260f.）。つまりここで、フレーゲ自身、すべての対象が確定できると前提してはならなかったということを認めている。

21 「「自己自身に等しくない」という概念の下には何も属さないため、私は次のように説明する。0 は、「自己自身に等しくない」という概念に帰属する基数である、と。〔……〕というのも、人はあらゆる対象について、それがこのような〔概念〕の下には属さないということを、知っているからである」（GLA87, §74）。

22 「〔……〕ゼロをもって、無が、ただし対象の無あるいは同一性の無であるものが、一つの対象あるいは自己への同一性になる、つまり、一つの対象あるいは自己への同一性として構成される〔……〕」（HN88）。

23 「それゆえ、ここには「0 と等しい」という概念と、その下に属する対象 0 とがあり、それらについて次のことが成り立つ。①「0 と等しい」という概念に帰属する基数は、「0 と等しい」という概念に帰属する基数と等しい。②「0 と等しいが、しかし 0 とは等しくない」という概念に帰属する基数は 0 である。したがって我々の説明により、「0 と等しい」という概念に帰属する基数は、自然な数列において 0 に直続する」（GLA90, §77）。

24 「1 は概念「0 に等しい」に帰属する基数である、と定義するならば、我々は先ほどの命題を、次のように表現できる。1 は自然な数列において 0 に直接的に続く、と」（GLA90, §77）。

25 「〔……〕F と x から出発してこそ（つまり n から出発してこそ）、（n に直接的に先行する）数 m が帰するような概念を反省することができるのである。それによってこそ、数 m を数 n に直接的に先行するものとして同定できるのである」（HN90）。

26 Cf. Gottlob Frege, Ignacio Angelelli (hrsg.), *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, Zweite Auflage, Mit E. Husserls und H. Scholzs' Anmerkungen, Hildesheim/Zürich/New York, Georg Olms Verlag, 1993, S. 61.

27 実際には « Ce n'est pas qu'avec... »とこの文章は始まっているが、文脈から考えて、« pas » は誤植であると判断した。

28 「そのようにすれば、次のことが示されたことになる。それは、自然な数列において n に直接的に続く一つの基数が存在すること、この系列にはいかなる最終項も存在しないことである」（GLA94, §82）。つまり、もしも概念「$\{0,1,2,\dots,n\}$という系列に属す」に帰属する基数が n に直続するということが証明されたなら、どんな数 n にも、それに直続する数が（自然系列の中に）ある、ということが証明されることになる。よって、この系列には終わりがない、ということになる。

[29] ここで性質 F とは､｢概念 H_n に帰属する数は､系列 N において､n に直続する｣(HN116sq.) という性質である。

[30] 「〔……〕言わば、反復により蓄積されてゆく純粋な運動。これによって、反復は常に、反復される反復において、反復の未確定な鎖の中に登録されるものとして、現象化される」（HN134sq.)。

[31] 「従って、反復される反復に現象性の地位を与えるとともに反復される反復をリズムとして、あるいは同じリズムのリズミカルな反復として現れさせる、この純粋な運動によってこそ、空間化と超越論的時間化が構成される」(HN134sq.)。ここでなぜリシールは単に「超越論的時間化」と言うのみではなく「空間化」とも言っているのであろうか。このことについて、我々は以下のように推測する。数を数えるということは、単に時間の産出ではない。というのも、先に数えられた数をいったん記憶のうちに保持し、次に数えられる数と並置するという作業も必要となるからである。それはつまり、時間的なものを空間的な並置（同時存在）にもたらすということである。この意味で、ここで「空間化」という言葉が用いられているのではないかと我々は推測する。なお、このような議論を展開していたのはベルクソンである｡｢我々が諸々の単位を追加するときに起こることであるが､我々が現在の瞬間に､これに先立つ諸瞬間を加えるとき、これら諸瞬間そのものに対して操作をしているのではない。というのも、それらは永遠に消えてしまっているからだ。そうではなく、我々は、これらの瞬間が､空間を貫くことによって残したように思われる､空間において持続する痕跡に対して、操作をしているのである」。Cf. Henri Bergson, Arnaud Bouaniche (éd.), *Essai sur les données immédiates de la conscience* [1889], Paris, P. U. F., « Quadrige », 2007*,* p.59.

[32] Richir, *Recherches phénoménologiques IV*, « Du schématisme transcendantal de la quantité »（「量の超越論的図式論」）« De la fondation dedekindienne de l’arithmétique à sa fondation transcendantale »（｢デデキントによる算術の基礎付けから、超越論的な算術の基礎付けへ｣）（RPh, IV）.

[33] 「〔……〕系列 N の算術的な諸特性を捨象するならば――思考内容を宙づりにするなら――一つの体系、すなわち一つの集合の諸要素としての諸々の個あるいは諸々の要素が残る〔……〕｣(RPh, IV, 14)。

[34] デデキントにとっては、 この定義からして、空集合はない。フレーゲと異なり、デデキントは 0 を自然数に含めなかったが、それは彼が、数を「思考の対象」として考えることによる。思考の対象はかならず何ものかであり、無ではないため、彼は数を 1 以上のものとして捉えることになる（cf. RPh, IV, 16)。

[35]「〔……〕あらゆるそれぞれの数 n の像 $\varphi(n)$ は、それはそれでまた数 n' であるから、よって、$\varphi(\mathrm{N})$ は N の部分であるから、ここで問題となっているのは、体系 N のそれ自身の中

への写像φであり、よってこれが、探究されるべきものなのである」（CDK272; BK207）。

36 写像は WS 第 2 節で定義されている。S に帰属するあらゆる要素 s に対して、φ に関して s の像であるような一つの s′ = φ(s) が存在するとき、φ は写像と呼ばれる。

37 全単射とは、全射であり、単射でもあることを意味する。集合 M から集合 N への写像で、値域が集合 N と一致し、かつ集合 M の異なる二つの要素に集合 N の異なる要素が対応するものは、全単射である。

38 「体系 S は、それが自己自身の一つの真部分に対して相似である〔＝両者の間に全単射がある〕とき、無限であると言う。そうでない場合は、S を有限な体系であると言う」（WS13）。

39 「S の要素 n は、ただ次の場合にのみ系列 N に属す。それは n が、次の二重の性質〔①②〕を保有するような、S のいかなる部分 K の要素でもある場合である。〔①〕要素 1 は K に含まれている。〔②〕像 φ(K) は K の部分である」（CDK274; BK208sq.）。

ハオ・ワンの解説から、デデキントの証明を説明する。まず、自然数のクラスは以下の二条件を満たす。「〔①〕1 はこのクラスに属す。〔②〕このクラスの或る要素に後続するものは、それはそれでこのクラスに属す」。逆に、これら二つの条件を満たすあらゆるクラスを考えるなら、これらのクラスの共通部分は、正確に、自然数のクラスであるはずである。理由は以下のとおりである。「この共通部分〔条件①②を満たすあらゆるクラスの共通部分〕は、〔自然数のクラスの要素よりも〕少ない要素を含んでいるということはあり得ない。なぜなら、あらゆる数は、もとの諸クラス〔条件①②を満たすあらゆるクラス〕のいずれのうちにもあるのでなければならないからである」。すなわち、条件①②を満たすようなクラスは、いかなるクラスであっても、N の要素すべてを含んでいるはずだということである。他方で、「この共通部分〔条件①②を満たすあらゆるクラスの共通部分〕は、〔自然数のクラスの要素よりも〕多くの要素を含んでいるということはあり得ない。なぜなら、もしもそうであったなら、条件〔①②〕をそれはそれで満たすような、より小さなクラス〔つまり自然数のクラス〕が存在することになってしまうからである」（Hao Wang, “The axiomatization of Arithmetic”, *The journal of symbolic logic*, vol. 22, no. 2, June 1957, pp.145-158. p.155）。すると、共通部分であるとされていたものは、実は共通部分ではなかったことになってしまう。よって、条件①②を満たすあらゆるクラスの共通部分は、自然数のクラスと一致する。なお、WS では第 79 条項で、「N は根本数 1 を含む唯一の数の鎖である」と述べられている。

デデキントは書簡でこれを「鎖」という言葉を用い換言する。「N は、要素 1 が含まれるような、（S における）あらゆる鎖 K の共通部分 1_0 あるいは $\varphi_0(1)$ である。これをもって初めて、系列 N の完全な性質が、確立された」（CDK274sq.; BK209）（デデキントは、WS 第 44 条項で、次のように定義している。A を S の部分とするとき、A が部分となるような鎖（例えば S）の全体の共通部分を A_0 で表すものとする。つまり 1_0 とは、1 が部分となるような

連鎖全体の共通部分ということ、より正確には、$\{1\}$ が部分となるような連鎖全体の共通部分ということである。また、A_0 は $\varphi_0(A)$ とも表される）。

40 「22. 定理。$A\,3\,B$ ならば、$A'\,3\,B'$ である。証明。A' のあらゆる要素は、A のうちに含まれている、よってまた B のうちにも含まれている一つの要素の像であるから、従って、B' の要素である。これが証明すべきことであった」(WS5)。すなわち、A が B の部分であるので、A' は B の部分の像である。ということは、A' は B' の部分であるということである。「定理。鎖 K の像 K' は、鎖である。証明。$K'\,3\,K$ から、22 により、$(K')'\,3\,K'$ が成り立つからである。これが証明されるべきことであった」(WS9)。

41 「このことにより、写像 φ に対して鎖の継起的な入れ込みという考え方へと導かれる。というのも、この定理を少しずつ適用することによって、以下のことが帰結するからである。 $\varphi\{\varphi[\ldots\varphi(\mathrm{K})]\} \subset \varphi[\ldots\varphi(\mathrm{K})]$ 」(Richir, RPh, IV, 21)。こうして、リシールのフレーゲ読解において問題になっていたものと同一のことが問題になっていることがわかる。リシールは GLA §79 の読解において、$\mathrm{d}, \varphi(\mathrm{d}), \varphi\big(\varphi(\mathrm{d})\big), \ldots, \varphi\Big(\varphi\Big(\varphi\big(\varphi(\ldots)\big)\Big)\Big)$ の系列があらかじめ網羅的に規定されうるものであるとされていることを問題としていたからである。

42 「それゆえ、我々の第二の指摘は、無限の問題に関わる」(RPh, IV, 24)。

43 「写像 φ は単射であり相似であるため、全単射である。従って、少なくとも一つの鎖の存在を保証するためには、無限の存在を前提しなければならない」(RPh, IV, 24)。

44 「7）私の分析において、その抽象的な範型が数の系列 N であるような、一重に無限な体系の持つ本質的な性質が、確認された（第 71、73 条項）後、問いが起こった。このような体系は、そもそも我々の思考の世界のうちに存在しているのであろうか？　論理的な存在証明なくしては、このような体系の概念が、もしかすると内的な矛盾を含んでいるのではないかという問いは、常に疑わしいものでありつづけるだろう。そこから、このような証明〔一重に無限な体系の存在証明〕の必要性が起こった（私の著作の第 66、72 条項を見よ）」（CDK275; BK209）。

45 「無限に様々な段階が存在するということは、無限な集合 S と、一重に無限な集合 N との区別によって、確証される」(RPh, IV, 24)。「〔……〕無限の存在、さらに少なくとも二つあるという無限の存在についてのこの問題こそ、デデキントの構築に対して、最も根底的な諸困難を突きつけるものである」(RPh, IV, 24sq.)。

46 「そこから我々は、第三の指摘へと着手する。それは、遺伝的継起あるいは、遺伝的系列の概念に関わるものである。またそこから、算術的帰納法の問題に関わるものである（算術的帰納法は、ペアノの第五の公理で捉え直されているものである）」(RPh, IV, 25sq.)。

47 「よって、系列 N の言わば超越論的構成の問題を飛び越す循環がここにある。この系列 N の超越論的構成は、常にすでにどこかで前提されている」(RPh, IV, 27)。

[48] 「〔……〕あらゆる数 n に妥当すべき諸定理を、一般的に証明するための方法もまた、存しているのではないか。そのとおりである！　有名な帰納法による証明は、鎖という概念のこのような堅固な基礎に依拠しているのである」（CDK275; BK209）。

[49] 「〔……〕S における、鎖から鎖への、写像 φ の反復は、これらの反復が N において確定するリズムそのものによって実行される。これは、系列 N それ自体のリズムである」（RPh, IV, 61）。

[50] ハオ・ワンは、Peano の 5 つの公理を次のように提示している。
「（P1）1 は数である。
（P2）いかなる数の後続者も数である。
（P3）いかなる二つの数も、同一の後続者を持たない。
（P4）1 はいかなる数の後続者でもない。
（P5）1 に属す特性で、この特性を持つあらゆる数の後続者にも属すような特性はすべて、あらゆる数に属す」（Hao Wang, "The axiomatization of Arithmetic", *op. cit.*, p.149）。
これはデデキントの第 1 から第 9 点のうち、以下のものとほぼ重なっている。
5）数系列の集合はいかなる数の後続数でもない 1 を含む。〔この集合が 1 を含むという点のみ対応〕
2）数の後続関係は集合からそれ自身の中への写像をなす。
3）この写像は集合からその真部分への全単射である。
5）数系列の集合はいかなる数の後続数でもない 1 を含む。〔1 がいかなる数の後続数でもないという点のみ対応〕
8）鎖に依拠して帰納法を用いることができる。帰納法により、数が持つ様々な性質が、すべての数に妥当することが証明できる。

[51] 「ところで、理念体の図式機能は自己 - 一致的だ」（ER90）。